



STABILITE ET PURETE SPECTRALE

INSTABILITE DE FREQUENCE DES OSCILLATEURS

Extrait de *L'Onde Électrique*, vol. 52, fasc. 11, décembre 1972

31



électronique



ADRET-Electronique

Instabilité de fréquence des oscillateurs

Résumé

Cet article fait le point sur le problème de la caractérisation de l'instabilité de fréquence à court terme des générateurs. On insiste particulièrement sur les diverses définitions possibles de la variance d'échantillon afin d'introduire la notion de variance d'Allan (définition dans le domaine temps). La relation entre la définition dans le domaine temps et la définition dans le domaine fréquence est démontrée ; ses conséquences sont étudiées.

1. Introduction

Depuis plusieurs dizaines d'années, le problème de l'instabilité de fréquence des générateurs radio-électriques a été l'objet de très nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

Malgré cela, ce n'est que récemment que la caractérisation de l'instabilité à court terme a été définie précisément.

Cet article vise à faire le point sur ce problème en insistant plus particulièrement sur certains aspects qui ne semblent pas avoir été approfondis dans la littérature.

Après un rappel sur l'historique du problème, les deux définitions de la stabilité actuellement recommandées sont présentées en développant en détail la caractérisation dans le domaine temps ; ce développement a pour but de situer la variance d'Allan vis-à-vis des autres variances utilisables.

La relation entre les deux définitions est ensuite démontrée très simplement en insistant sur ses conséquences quant à la convergence de la variance d'Allan.

Il est bien sûr impossible de traiter un problème aussi vaste de façon exhaustive. De nombreux aspects ne seront pas abordés dans cet article (problèmes théoriques liés à l'utilisation des processus aléatoires ; influence de l'environnement sur la stabilité d'un oscillateur ; dérive systématique de fréquence ; bancs de mesure expérimentaux, etc.). La lecture des références citées est indispensable pour avoir une vue d'ensemble des aspects variés que revêt le problème de la stabilité de fréquence.

Nous espérons toutefois avoir contribué à préciser plusieurs points importants relatifs aux définitions de la stabilité de fréquence à court terme.

Avant de poursuivre, il n'est pas inutile d'essayer

de préciser ce que l'on entend par « court terme ». La frontière entre le court terme et le long terme ne possède pas une valeur numérique unique, valable pour tout générateur et pour toute application ; à la limite, une valeur différente peut exister pour un générateur donné utilisé dans une application donnée [1].

Du point de vue de la caractérisation de l'instabilité de fréquence, il est possible de considérer comme instabilité à court terme l'instabilité ayant pour origine les perturbations aléatoires stationnaires de l'oscillateur (bruit thermique par exemple), et comme instabilité à long terme celle dont l'origine est la variation lente et systématique de certaines propriétés de l'oscillateur (vieillessement du cristal de quartz par exemple).

2. Historique

Le besoin de stabiliser les fréquences émises par les générateurs radioélectriques a été ressenti dès les premières utilisations pratiques du spectre électromagnétique.

Si la caractérisation de la stabilité à long terme n'a pas posé de problèmes importants, il n'en a pas été de même pour la stabilité de fréquence à court terme.

C'est l'historique de la caractérisation de la stabilité à court terme que nous souhaitons présenter brièvement.

En considérant la littérature américaine sur ce sujet, il est possible de distinguer trois grandes périodes :

2.1. Avant 1964

Une bonne stabilité à court terme étant requise depuis plusieurs décennies pour de nombreuses applications, il en est résulté de nombreuses définitions possédant peu d'intérêt général, malgré leur utilité en vue d'une application donnée.

La confusion générale ainsi créée a mis en évidence la nécessité d'une définition précise, nécessité qui s'est concrétisée en novembre 1964, au cours du « Symposium sur la Définition et la Mesure de la Stabilité de Fréquence à Court Terme » organisé conjointement

par la NASA et l'IEEE [1] (seul symposium consacré uniquement au domaine du court terme).

Du point de vue de la caractérisation, deux articles importants sont à considérer [2, 3] où sont définis les paramètres $I(\tau)$ et $S_{\phi}(f)$ caractéristiques dans les domaines temps et fréquence de l'instabilité de fréquence.

C'est à l'issue de ce symposium que s'est constitué le « Sous-Comité sur la Stabilité de Fréquence du Comité Technique sur la Fréquence et le Temps du Groupe sur l'Instrumentation et la Mesure de l'IEEE », comprenant onze membres appartenant à des organismes divers (Industries, National Bureau of Standards, NASA, US Naval Observatory, Smithsonian Astrophysical Observatory).

2.2. 1964 - 1970

Le travail du « Sous-Comité sur la Stabilité de Fréquence » se concrétise par la publication d'une Note Technique du National Bureau of Standards intitulée « Characterization of Frequency Stability » [4] où les auteurs proposent deux définitions sur lesquelles nous reviendrons longuement. Ce texte a été publié en mai 1971 dans la revue « IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement ».

Cette période a également été marquée par la parution d'un numéro spécial de la revue « Proceedings of the IEEE » consacré à la Stabilité de Fréquence (février 1966), où est introduite la notion de variance d'Allan [5].

2.3. Après 1970

L'utilisation des deux définitions proposées par le Sous-Comité, et principalement de la variance d'Allan dont la détermination expérimentale est particulièrement commode, se généralise [6].

Pour être complet, citons la parution d'un numéro spécial de la revue « Proceedings of the IEEE » (mai 1972) consacré au « domaine temps-fréquence », mais dans lequel rien de nouveau n'est publié concernant les définitions de la stabilité de fréquence.

Signalons enfin que l'évolution des idées dans ce domaine se concrétisait au cours d'exposés présentés au symposium sur le contrôle des fréquences [7, 8, 9] qui se tient tous les ans à Atlantic-City depuis plus d'un quart de siècle [10].

3. Modèle mathématique

Avant de présenter les deux définitions recommandées pour l'instabilité de fréquence, il est indispensable de préciser le modèle mathématique utilisé pour représenter le signal issu d'un générateur.

Etant donnée la nature aléatoire des instabilités qui nous intéressent ici, il est nécessaire d'utiliser la théorie des processus aléatoires pour définir et étudier ce modèle.

Un modèle convenable doit contenir des paramètres susceptibles d'être estimés expérimentalement, et être en accord avec les grandeurs observables du système réel qu'il représente [4].

La tension de sortie instantanée d'un générateur peut être représentée par (*) :

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] \quad (1)$$

V_0 et ν_0 sont respectivement les valeurs nominales de l'amplitude et de la fréquence du signal.

$\varepsilon(t)$ et $\varphi(t)$ sont des processus aléatoires de moyenne nulle représentant respectivement les fluctuations de l'amplitude et de la phase autour des valeurs nominales.

Ces processus varient lentement par rapport à $\sin 2\pi\nu_0 t$ (leurs densités spectrales sont quasiment nulles pour les fréquences $f > f_1$ où $f_1 \ll \nu_0$).

La fréquence angulaire instantanée du signal $V(t)$ est la dérivée temporelle de la phase totale instantanée [3] :

$$\omega(t) = 2\pi\nu(t) = \frac{d}{dt} [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] = 2\pi\nu_0 + \dot{\varphi}(t). \quad (2)$$

Le processus aléatoire $\dot{\varphi}(t)$ représente les fluctuations de la fréquence angulaire du signal. La fréquence instantanée du signal est alors :

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi}. \quad (3)$$

Les fluctuations d'amplitude $\varepsilon(t)$, généralement négligeables pour les générateurs de haute qualité, ne seront pas considérées ici.

Pour un oscillateur de précision, la condition :

$$|\dot{\varphi}(t)| \ll 2\pi\nu_0 \quad (4)$$

doit être vérifiée pratiquement à chaque instant.

La fluctuation de fréquence instantanée relative (grandeur sans dimension) est définie par :

$$y(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0}. \quad (5)$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir les paramètres caractérisant l'instabilité de fréquence.

4. Définitions de l'instabilité de fréquence

Les conséquences de l'instabilité de fréquence pouvant se manifester de façons diverses dans les applications, deux définitions sont recommandées, l'une dans le domaine fréquence, l'autre dans le domaine temps [4].

La grandeur $y(t)$ qui contient toutes les informations sur l'instabilité relative servira de point de départ pour l'établissement des paramètres caractéristiques de ces deux définitions.

Il faut insister que le fait que ces paramètres sont, aussi bien l'un que l'autre, des paramètres *théoriques* dont on ne peut faire que des *estimations* expérimentales.

(*) Nous utiliserons les notations de la référence [4]. Toutefois des modifications seront nécessaires pour préciser certains points.

4.1. Définition dans le domaine fréquence

L'instabilité de fréquence relative peut être caractérisée par la densité spectrale unilatérale (*) de puissance du processus aléatoire $y(t)$, définie par :

$$S_y(f) = 4 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (6)$$

Le spectre $S_y(f)$ a pour dimension l'inverse d'une fréquence (Hz^{-1}).

En notant $S_{\phi}(f)$ et $S_{\omega}(f)$ les densités spectrales des fluctuations de fréquence angulaire et des fluctuations de phase, on a les relations :

$$S_{\omega}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{\phi}(f) \quad (7)$$

$$S_y(f) = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2} S_{\omega}(f) \quad (8)$$

($S_{\omega}(f)$ s'exprime en $(\text{rd/s})^2/\text{Hz}$)

$$S_y(f) = \frac{1}{\nu_0^2} f^2 S_{\phi}(f) \quad (9)$$

($S_{\phi}(f)$ s'exprime en rd^2/Hz)

La relation (9) est particulièrement intéressante, $S_{\phi}(f)$ pouvant être déterminé par l'analyse spectrale du signal de sortie d'un détecteur de phase dont les signaux d'entrée sont en quadrature.

Les principaux types de bruit de fréquence peuvent être classés selon la nature de leur spectre (tableau I).

TABLEAU I

Origine physique	$S_y(f)$	Nature du bruit de fréquence	Nature du bruit de phase	$S_{\phi}(f)$
	f^{-2}	Marche aléatoire		f^{-4}
Variation des éléments déterminant la fréquence	f^{-1}	Scintillation		f^{-3}
Bruit thermique additif interne	f^0	Blanc	Marche aléatoire	f^{-2}
Modulation de phase par les transistors ..	f^1		Scintillation	f^{-1}
Bruit thermique additif externe	f^2		Blanc	f^0

De tels spectres ne sont valables que sur une bande de fréquence finie. Le bruit d'un oscillateur réel est une combinaison de ces divers bruits, l'un ou l'autre dominant sur un intervalle de fréquence donné.

(*) Voir annexe I. Le symbole $\nu(t)$ est utilisé pour représenter la fréquence instantanée du signal, la lettre f étant réservée aux fréquences de Fourier (indépendantes du temps) introduites par l'analyse spectrale.

4.2. Définition dans le domaine temps

La popularité de la caractérisation dans le domaine temps (« diagramme $\sigma - \tau$ ») résulte en grande partie de l'utilisation commode des compteurs de fréquence.

Son importance nous semble justifier un développement visant à situer la variance d'Allan [5] par rapport aux diverses variances utilisables (et parfois utilisées).

4.2.1. Variance vraie des fluctuations de fréquence

La variance (*) vraie $I^2(\tau)$ de la fluctuation relative de fréquence moyennée pendant une durée τ est un point de départ commode pour cette étude :

$$\bar{y} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt'$$

$$I^2(\tau) = \sigma^2[\bar{y}] \quad (10)$$

$$\text{Soit : } I(\tau) = \frac{\sigma[\bar{\phi}_{\tau}]}{2\pi\nu_0} \quad (11)$$

$$\text{avec : } \bar{\phi}_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \phi(t') dt'$$

Il résulte de la définition de $I(\tau)$ la relation :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} I(\tau) = \frac{\sigma[\dot{\phi}(t)]}{2\pi\nu_0} = \frac{\sqrt{\dot{\phi}^2(t)}}{2\pi\nu_0} \quad (12)$$

La stationnarité du processus aléatoire $\phi(t)$ se traduit par la propriété :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) = 0. \quad (13)$$

L'allure de la courbe $I(\tau)$ est représentée sur la figure 1.

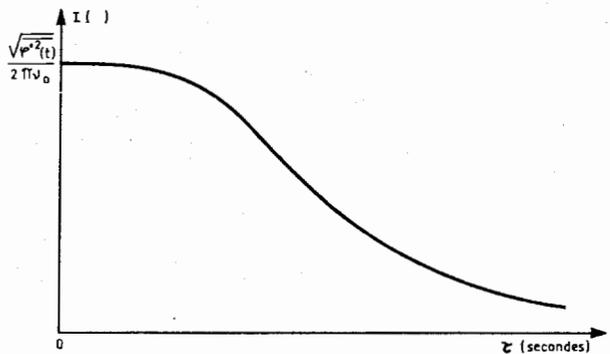


FIG. 1. — Instabilité dans le domaine temps.

La détermination pratique de $I(\tau)$ conduit aux notions de variance d'échantillon et de moyenne de la variance d'échantillon.

(*) La variance d'une variable aléatoire x est égale à : $\sigma^2[x] = [x^2] - [x]^2$ (carré moyen moins la moyenne au carré).

4.2.2. Première définition de la variance d'échantillon

Soit un ensemble de N mesures de durée τ de la fréquence relative :

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(t') dt'$$

avec $k = 1, 2, 3, \dots, N$ et $t_{k+1} = t_k + T$; T est la durée entre le début de deux mesures successives, τ est la durée de chaque mesure, t_1 est arbitraire. Ce cycle de mesure est représenté sur la figure 2.

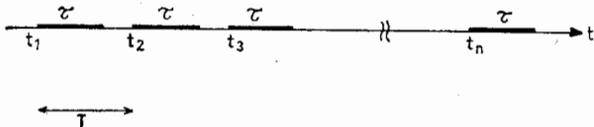


FIG. 2. — Cycle de mesure.

La variance de cet échantillon de N valeurs s'écrit [11] :

$$\sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \quad (14)$$

Cette quantité est elle-même une variable aléatoire caractérisable par sa moyenne $\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle$, déterminée théoriquement en effectuant une infinité de fois des ensembles de N mesures, puis en calculant la moyenne des variances d'échantillon ainsi obtenues. Le problème important de la convergence de $\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle$ lorsque $N \rightarrow \infty$ peut être étudié en calculant le rapport :

$$R_{(1)}(N, T, \tau) = \frac{\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle}{I^2(\tau)} \quad (N \text{ entier } \geq 2) \quad (15)$$

Dans le cas particulier important des mesures adjacentes ($T = \tau$), le calcul donne l'expression [12] :

$$R_{(1)}(N, \tau, \tau) = 1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)} \right)^2 \quad (16)$$

L'allure de $I(\tau)$ pour un processus $\phi(t)$ stationnaire d'écart-type fini (fig. 1) permet de déduire l'allure de $R_{(1)}(N, \tau, \tau)$; plus N est grand et plus l'estimation de la variance vraie est précise (fig. 3).

L'équation (16) et la figure 3 sont illustrées par les résultats expérimentaux reportés dans le tableau II pour $\tau = 100$ ms et $T \approx 103$ ms (les mesures ne sont pas rigoureusement adjacentes).

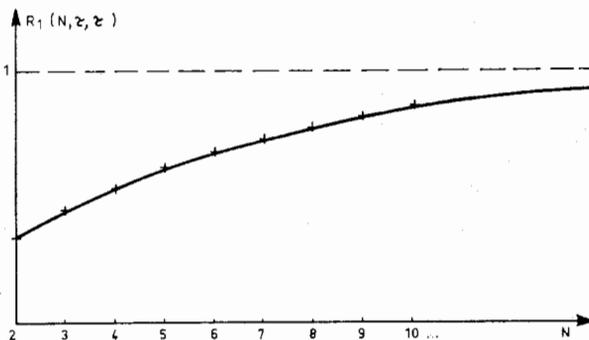


FIG. 3. — Allure du rapport $R_1(N, \tau, \tau)$ (cas des mesures adjacentes)

La rapidité avec laquelle $\langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle^{1/2}$ tend vers $I(\tau)$ dépend de $I(\tau)$, donc de la nature du bruit de fréquence. Pour certains types de bruit (par exemple $S_y(f) \sim f^{-1}$ ou f^{-2}), la variance $\langle \sigma_{(1)}^2(N, \tau, \tau) \rangle$ diverge lorsque $N \rightarrow \infty$. Dans d'autres cas, la convergence est très lente. D'autre part, il n'est pas possible expérimentalement de faire croître N indéfiniment. Ces diverses raisons laissent prévoir qu'il sera nécessaire de fixer N pour obtenir une définition pratique de l'instabilité. Toutefois, $I(\tau)$ est un paramètre extrêmement important lors des études théoriques du bruit dans les oscillateurs.

Cas des mesures non corrélées

Si les mesures successives sont non corrélées (grande valeur du temps mort), le rapport $R_{(1)}(N, T, \tau)$ prend la forme simple [12] :

$$R_{(1)}(N) = 1 - \frac{1}{N} \quad (17)$$

Cette loi, obtenue également dans le cas des mesures adjacentes si $\phi(t)$ est un bruit blanc ($I(\tau) = \text{constante} \times \tau^{-1/2}$), conduit à envisager une seconde définition de la variance d'échantillon.

4.2.3. Deuxième définition de la variance d'échantillon. Variance d'Allan

La variance de l'échantillon des N mesures \bar{y}_k peut être définie par [4, 5] :

$$\sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \quad (18)$$

Si les mesures sont non corrélées, cette définition

TABLEAU II

Utilisation de la première définition

N	2	10	100	1 000	10 000
$\langle \sigma_{(1)}^2(N, T, \tau) \rangle^{1/2}$	$5,9 \cdot 10^{-11}$	$6,9 \cdot 10^{-11}$	$7,5 \cdot 10^{-11}$	$8,6 \cdot 10^{-11}$	$1,0 \cdot 10^{-10}$

Le résultat obtenu varie presque du simple au double lorsque N passe de 2 à 10 000, ce qui montre bien la nécessité de préciser N pour tout résultat de mesure.

conduit au rapport (fig. 4) :

$$R_{(2)}(N, T, \tau) = \frac{\langle \sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) \rangle}{I^2(\tau)} = 1 \text{ pour tout } N \geq 2 \quad (19)$$

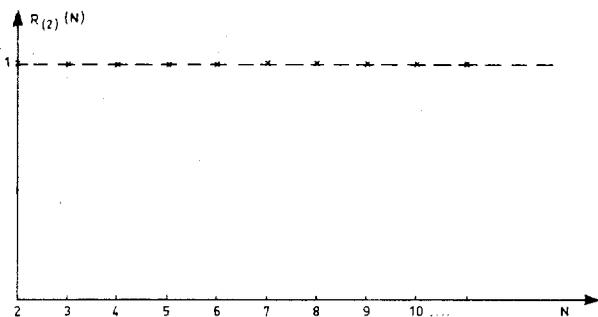


FIG. 4. — Deuxième définition ; mesures non corrélées.

Ainsi, dans ce cas particulier, la deuxième définition conduit, même en se limitant à $N = 2$, à une estimation sans biais de la variance vraie.

Cette conclusion est illustrée par les résultats expérimentaux reproduits dans le tableau III pour $\tau = 1$ ms et $T \approx 1$ s.

TABLEAU III

Utilisation de la deuxième définition dans le cas des mesures non corrélées

N	2	10	100	1 000
$\langle \sigma_{(2)}^2(N, T, \tau) \rangle^{1/2}$	$2,63 \cdot 10^{-9}$	$2,72 \cdot 10^{-9}$	$2,67 \cdot 10^{-9}$	$2,62 \cdot 10^{-9}$

On obtient sensiblement la même valeur avec cent couples de mesure qu'avec cent fois mille mesures. En prenant $N = 2$, le processus de mesure est considérablement simplifié et la durée totale nettement réduite.

Variance d'Allan

Les considérations précédentes conduisent à choisir la valeur $N = 2$; c'est la variance dont l'utilisation a été préconisée par ALLAN dès 1966 [5] si l'on choisit également un temps mort nul ($T = \tau$) :

$$\langle \sigma_{(2)}^2(2, \tau, \tau) \rangle = \frac{\langle (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 \rangle}{2} \quad (20)$$

Contrairement à la variance vraie ($N = \infty$), la variance d'Allan possède l'avantage de converger pour les divers types de bruits généralement rencontrés dans les oscillateurs.

L'origine de cette convergence sera nettement mise en évidence par les relations entre les variances et $S_y(f)$ (§ 5).

Insistons sur le fait que la variance d'Allan, généralement notée $\sigma_y^2(\tau)$, est une grandeur idéale en ce sens que sa détermination nécessite une infinité de couples de mesure.

L'estimation expérimentale de la variance d'Allan à l'aide d'un nombre fini m de valeurs de $\sigma_{(2)}^2(2, \tau, \tau)$ s'écrit :

$$\sigma_y^2(\tau) \approx \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \quad (21)$$

Il faut enfin préciser que pour certains modèles de bruit, la bande passante du système de mesure peut

avoir un effet important sur le résultat obtenu expérimentalement ; dans d'autres cas, son effet est négligeable ; d'une façon générale, il est souhaitable de préciser la bande passante utilisée [4].

L'influence de la définition de la variance d'échantillon sur l'allure du rapport $R(N, \tau, \tau)$ conduit à se demander si d'autres définitions ne peuvent pas, dans des cas particuliers, donner une estimation sans biais de la variance vraie (que l'on suppose exister).

4.2.4. Troisième définition de la variance d'échantillon

Le bruit blanc de phase ($S_\phi(f) = \text{constante}$) est une perturbation importante de tout oscillateur pour laquelle la variance vraie a pour expression :

$$I(\tau) = \frac{\text{Constante}}{\tau} \quad (22)$$

Les deux définitions présentées pour la variance

d'échantillon donnent respectivement :

$$R_{(1)}(N) = 1 - \frac{1}{N^2} \quad (23)$$

$$R_{(2)}(N) = 1 + \frac{1}{N} \quad (24)$$

Pour avoir une estimation sans biais de la variance vraie avec une valeur finie de N , une troisième définition doit être adoptée pour la variance d'échantillon [12] :

$$\sigma_{(3)}^2(N, T, \tau) = \frac{N}{N^2 - 1} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \quad (25)$$

Il vient alors dans le cas du bruit blanc de phase :

$$R_{(3)}(N) = \frac{\langle \sigma_{(3)}^2(N, \tau, \tau) \rangle}{I^2(\tau)} = 1 \quad \text{pour tout } N \geq 2 \quad (26)$$

Ainsi, dans ce cas important (stabilité à court terme des oscillateurs à quartz), une estimation sans biais de la variance vraie est obtenue même en se limitant à $N = 2$, ce qui simplifie considérablement le processus de mesure.

Cette variance est liée à la variance d'Allan par la relation :

$$I^2(\tau) = \langle \sigma_{(3)}^2(2, \tau, \tau) \rangle = \frac{2}{3} \sigma_y^2(\tau) \quad (27)$$

La variance d'Allan est donc supérieure à la variance vraie (courbe $\mu = -2.0$ de la figure 1 [5]).

4.2.5. Conclusion sur les diverses variances

L'étude qui précède avait pour but de situer la variance d'Allan par rapport aux diverses variances utilisables et particulièrement par rapport à la variance vraie lorsqu'elle existe.

Les inconvénients de la variance vraie sont la non convergence pour certains spectres de bruit (*), les difficultés de la procédure d'estimation expérimentale et la longue durée totale de mesure.

Aux avantages de la variance d'Allan déjà cités s'en ajoute un autre : l'utilisation de cette variance par les différents laboratoires permet une comparaison des résultats très significative (à condition de préciser certains paramètres tels que le nombre total de mesure, la bande passante de l'appareillage, etc.).

Nous avons vu enfin que dans certains cas particuliers, une définition modifiée peut se révéler utile.

En outre, la mesure des variances en fonction de N peut permettre l'étude des propriétés statistiques des oscillateurs.

5. Relation entre les deux définitions recommandées

L'existence de deux définitions de l'instabilité de fréquence nécessite l'établissement d'une relation entre elles.

Une démonstration très simple de la relation entre la variance d'Allan $\sigma_y^2(\tau) \equiv \langle \sigma_{(2)}^2(2, \tau, \tau) \rangle$ et la densité spectrale $S_y(f)$ est rappelée [13].

L'équation (16) associée aux définitions (14) et (18) donne l'expression du rapport :

$$R_2(N, \tau, \tau) = \frac{N}{N-1} \left[1 - \left(\frac{I(N\tau)}{I(\tau)} \right)^2 \right] = \frac{\langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle}{I^2(\tau)} \quad (28)$$

Soit :

$$\langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle = \frac{N}{N-1} [I^2(\tau) - I^2(N\tau)] \quad (29)$$

La relation classique [2, 3] :

$$I^2(\tau) = \int_0^\infty S_y(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df, \quad (30)$$

permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle &= \frac{N}{N-1} \left[\int_0^\infty S_y(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 df \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty S_y(f) \left(\frac{\sin N \pi \tau f}{N \pi \tau f} \right)^2 df \right], \\ \langle \sigma_{(2)}^2(N, \tau, \tau) \rangle &= \frac{N}{N-1} \int_0^\infty S_y(f) \left(\frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \\ &\quad \times \left[1 - \left(\frac{\sin N \pi \tau f}{N \sin \pi \tau f} \right)^2 \right] df. \quad (31) \end{aligned}$$

(*) Cela résulte toutefois du caractère physiquement non réaliste du spectre choisi, par exemple f^{-1} jusqu'à la fréquence zéro.

Cette relation permet le calcul de l'instabilité dans le domaine temps, connaissant $S_y(f)$. Il n'existe pas de relation inverse, simple et applicable à tous les modèles de bruit ; aussi est-il souvent préférable de déterminer en premier lieu $S_y(f)$ (particulièrement dans les analyses théoriques).

Le choix de la valeur $N = 2$ donne la variance d'Allan :

$$\sigma_y^2(\tau) = \int_0^\infty S_y(f) \frac{2 \sin^4 \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} df. \quad (32)$$

La variance vraie ($N = \infty$) et la variance d'Allan ($N = 2$) peuvent donc s'écrire toutes deux sous la forme :

$$\int_0^\infty S_y(f) H^2(f) df \quad (33)$$

$$\text{avec } \begin{cases} H_\infty(f) = \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} & \text{pour la variance vraie} \\ H_2(f) = \sqrt{2} \frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f} & \text{pour la variance d'Allan} \end{cases}$$

L'allure de la fonction de transfert $H_2(f)$ est représentée sur la figure 5.

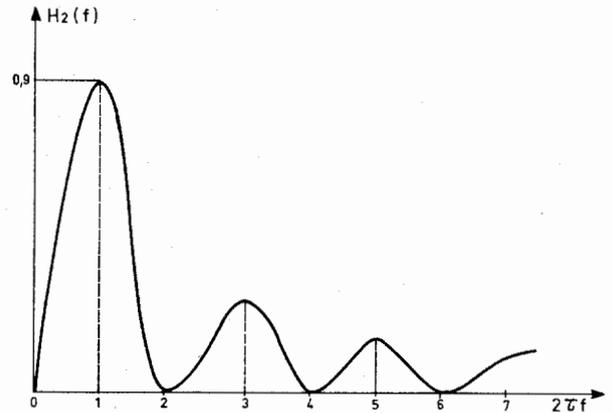


FIG. 5. — Fonction de transfert de la variance d'Allan

$$H_2(f) = \sqrt{2} \frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f}$$

Rappel $\lim_{f \rightarrow 0} H_\infty(f) = 1$

La variation des fonctions de transfert $H_\infty(f)$ et $H_2(f)$ lorsque f tend vers zéro, montre nettement l'origine de la convergence de la variance d'Allan et de la divergence de la variance vraie pour le bruit de scintillation de fréquence $S_y(f) = 1/f$. Notons toutefois que la variance vraie converge également dans le cas du modèle stationnaire de bruit de scintillation développé dans la référence [14], dont le spectre de fluctuation de fréquence $S_y(f)$ tend vers une valeur finie lorsque f tend vers zéro (aucun argument théorique ou expérimental ne laisse supposer qu'un spectre en f^{-1} doit se prolonger jusqu'à $f = 0$).

D'une façon générale, la variance d'Allan est beaucoup moins dépendante de la partie très basse fréquence du spectre $S_y(f)$, que ne l'est la variance vraie pour laquelle $\lim_{f \rightarrow 0} H_\infty^2(f) = 1$.

La relation entre domaine temps et domaine

fréquence a été étudiée en détail [4, 5] pour le modèle de bruit :

$$S_y(f) = \begin{cases} h_n f^n & 0 \leq f \leq f_h \\ 0 & f > f_h \end{cases} \quad n = -2, -1, 0, 1, 2$$

En outre, pour ce type de bruit, les relations entre $\langle \sigma_{(2)}^2(N_1, T_1, \tau_1) \rangle$ et $\langle \sigma_{(2)}^2(N_2, T_2, \tau_2) \rangle$ ont été également étudiées très en détail [4, 15]. Aussi ne reviendrons nous pas sur ces problèmes.

6. Conclusion

— Nous avons tenté de faire le point sur le délicat problème de la stabilité de fréquence à court terme en étudiant de façon particulièrement détaillée les diverses caractérisations possibles dans le domaine temps.

La signification de la variance d'Allan a été précisée ainsi que sa relation avec la variance vraie et son intérêt dans le cas des mesures non corrélées.

Une définition de la variance d'échantillon présentant un intérêt particulier dans le cas du bruit blanc additif externe a été présentée.

La relation entre la variance d'Allan et la densité spectrale des fluctuations de fréquence a été démontrée et ses conséquences sur la convergence de la variance d'Allan en ont été déduites.

— La procédure expérimentale permettant l'estimation de $S_y(f)$ fait également intervenir des paramètres tels que la bande passante d'analyse, la durée d'intégration, etc.

Un traitement statistique des données dans le domaine fréquence est aujourd'hui possible en utilisant les méthodes de l'analyse spectrale discrète [16, 17, 18].

Ces méthodes, permettant l'analyse des propriétés statistiques du bruit des oscillateurs, semblent avoir un avenir très intéressant.

ANNEXE I

Spectre bilatéral et spectre unilatéral

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire $y(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_y(\tau)$ [11] :

$$S_y^B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

Cette relation définit un spectre bilatéral ($-\infty < f < +\infty$) tel que :

$$\begin{cases} S_y^B(-f) = S_y^B(f) \\ \int_{-\infty}^{\infty} S_y^B(f) df = \langle y^2(t) \rangle \end{cases}$$

Si l'utilisation d'un spectre bilatéral est commode dans les études à caractère théorique, le spectre

unilatéral défini par :

$$\begin{cases} S_y(f) = 2S_y^B(f) & f \text{ positif} \\ S_y(f) = 0 & f \text{ négatif} \end{cases}$$

est mieux adapté aux considérations physiques ou expérimentales. En utilisant la parité de $R_y(\tau)$, puis la définition du spectre unilatéral, il vient successivement :

$$S_y^B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$S_y^B(f) = 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$S_y(f) = 4 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau \quad (f > 0)$$

avec la propriété :

$$\int_0^{\infty} S_y(f) df = \langle y^2(t) \rangle.$$

ANNEXE II

Le spectre de Radiofréquence (R.F.)

Pour certaines applications des oscillateurs ultra-stables, le paramètre le plus important est le spectre de radio-fréquence du signal $V(t)$ [2] :

$$S_v(f) = 4 \int_0^{\infty} R_v(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau$$

$R_v(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de $V(t)$. $S_v(f)$ représente la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquence, centrée sur la fréquence porteuse ν_0 .

Le spectre RF n'est pas considéré comme un paramètre convenable pour caractériser l'instabilité de fréquence car les fluctuations d'amplitude $\varepsilon(t)$ sont également à l'origine de bandes latérales de bruit [4].

Toutefois, lorsque le bruit d'amplitude est négligeable et que les fluctuations de fréquence sont stationnaires et gaussiennes, une relation générale peut être établie entre $S_v(f)$ et $I(\tau)$ [12] :

$$S_v^B(f) = \frac{V_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega_0^2}{2} \tau^2 I^2(\tau)} \cos 2\pi \nu_0 \tau e^{-i2\pi f\tau} d\tau.$$

Lorsque les fluctuations de phase sont également gaussiennes et stationnaires, cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$S_v(f) = \frac{V_0^2}{2} e^{-\frac{\omega_0^2}{2} \tau^2 I^2(\tau)} \left\{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi(f - \nu_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \times [S_\varphi(f) \otimes S_\varphi(f)]_{\nu_0} \right\}.$$

Le crochet représente $n-1$ produits de convolution de $S_{\phi}(f)$ par lui-même, translatés autour de la fréquence porteuse ν_0 .

Remerciements

Ce travail est issu des très nombreuses discussions que j'ai eues avec M. le Professeur J. UEBERSFELD. Je tiens à l'en remercier très vivement.

Je remercie également M. JUAN (ORTF Limours) qui a bien voulu effectuer les expériences dont les résultats sont reportés dans les tableaux II et III.

Bibliographie

- [1] IEEE-NASA Symposium on Short-Term Frequency Stability. G.S.F.C. Greenbelt, Maryland, November 23-24, 1964.
- [2] BAGHDADY E.J., LINCOLN R.D., NELIN B.D. — Short Term Frequency Stability : Theory, Measurement and Status. Référence [1] p. 65.
- [3] CUTLER L.S. — Some aspects of the theory and measurement of Frequency Fluctuations in Frequency Standards. Reference [1] page 89.
- [4] BARNES J.A. et al. — Characterization of Frequency Stability. NBS Technical Note N° 394, October 1970.
- [5] ALLAN D.W. — Statistics of Atomic Frequency Standards. *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, n° 2, février 1966, p. 221.
- [6] Proceedings of the Annual Frequency Control Symposium 1971 et 1972 (voir la référence [10]).
- [7] EDSON W.A. — Progress and Problems in Short Term Stability. Proc. 19th Annual Frequency Control Symposium (1965).
- [8] CUTLER L.S. — Present Status in short term frequency stability. Proc. 21th Annual Frequency Control Symposium (1967).
- [9] BARNES J.A. — Problems in the definition and Measurement of Frequency Stability. Proc. 26th Annual Frequency Control Symposium (1972).
- [10] Les proceedings sont publiés depuis 1956 :
1956-1960 : Library of Congress, Washington D.C.
1961-1967 : National Technical Information Service, Springfield, Virginia.
1968 : Defense Documentation Center, Alexandria, Virginia.
1969-1972 : Electronic Industries Association, Washington D.C.
- [11] PAPOULIS A. — Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mac Graw Hill Book Company (1965).
- [12] RUTMAN J. — Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne. Thèse de Doctorat d'Etat. Paris 1972.
- [13] RUTMAN J. — Comment on : Characterization of Frequency Stability. *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-21, n° 1, février 1972, p. 85.
- [14] RUTMAN J., UEBERSFELD J. — A model for flicker frequency noise of oscillators. *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, n° 2, February 1972, p. 233.
- [15] BARNES J.A. — Tables of Bias Functions, B_1 and B_2 , for variances based on finite samples of Processes with power law spectral densities. NBS Technical Note N° 375, January 1969.
- [16] PRINS J. de., DESCORNET G., GORSKI M., and TAMINE J. — Frequency Domain Interpretation of Oscillator Phase Stability. *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-18, n° 4, December 1969, p. 251.
- [17] PRINS J. de., CORNELISSEN G. — Analyse spectrale discrète. EUROCON, Lausanne, 18-22 octobre 1971.
- [18] GROSLAMBERT J., OLIVIER M., and UEBERSFELD J. — Automatic Plotting Systems for Frequency Stability curves and discrete spectrum of frequency standards. Conference on Precision Electromagnetic Measurements, Boulder, Colorado, June 26-29, 1972. *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, November 1972.

Jacques RUTMAN, né en 1945, licencié ès Sciences Physiques, Docteur ès Sciences Physiques ; Responsable de la Recherche à la Société Adret Electronique, B.P. 33, 78190 Trappes, Tél. 462.83.50.



adret électronique

12-14, AVENUE VLADIMIR KOMAROV - 78190 TRAPPES

TEL. : **051 29 72** — B.P. 33 - 78190 TRAPPES

TELEX ADREL TRAPS 60821

Société anonyme au capital de 4.200.000 f

R.C. Versailles 67 B 507 INSEE 285 78 621 0 005

Compte Chèque Postal : Paris 21 797 04