

## ANALYSE SPECTRALE DU BRUIT DE FRÉQUENCE DES OSCILLATEURS PAR LA VARIANCE DE HADAMARD

par

Gérard SAUVAGE  
Maître ès sciences physiques \*

et

Jacques RUTMAN  
Docteur ès sciences physiques \*\*

**RÉSUMÉ.** — La variance de Hadamard permet d'effectuer, à l'aide d'un fréquencemètre, l'analyse spectrale du bruit de fréquence des oscillateurs dans une gamme de fréquences accessible à un nombre restreint d'analyseurs de spectre; en outre la bande équivalente d'analyse peut être rendue très faible. Une étude mathématique détaillée de cette technique de mesure est présentée dans cet article. Les propriétés caractéristiques et les limitations inhérentes au principe même de cette technique sont mises en évidence à partir de l'étude de sa fonction de transfert; l'influence de la nature du spectre analysé sur la validité des résultats obtenus est étudiée. Enfin, les améliorations de cette technique qui peuvent résulter d'une plus grande complexité du processus de mesure sont présentées.

**PLAN.** — Notation 1 : Introduction • 2 : **Définitions et terminologie** 2.1. Caractérisation dans le domaine des fréquences; 2.2. Caractérisation dans le domaine des temps • 3 : **Cycle de mesure et fonction de transfert de la variance d'Allan.** 4 : **Définition de la variance de Hadamard.** • 5 : **Fonction de transfert de la variance de Hadamard** 5.1. Calcul de la fonction de transfert; 5.2. Largeur de bande équivalente; 5.3. Relations approchées entre la variance de Hadamard et le spectre de fréquence. • 6 : **Limitations en fréquence de la variance de Hadamard** 6.1. Fréquence d'analyse maximale; 6.2. Fréquence d'analyse minimale; 6.3. Influence du spectre analysé. • 7 : **Amélioration de la méthode par pondération des mesures** 7.1. Pondération par les coefficients du binôme : élimination des lobes latéraux; 7.2. Pondération pseudo sinusoïdale : élimination de certains pics harmoniques. Conclusion. 2 annexes. Bibliographie (7 réf.).

### NOTATION

$\sigma_y^2(\tau)$	: variance d'Allan.
$h_A(t)$	: cycle de mesure de la variance d'Allan.
$H_A(f)$	: fonction de transfert de la variance d'Allan.
$\sigma_H^2(N, T_M, \tau)$	: variance de Hadamard.
$2N$	: nombre de mesures regroupées entre elles.
$T_M$	: temps mort entre les mesures.
$\tau$	: durée de chaque mesure.
$h_H(t)$	: cycle de mesure de la variance de Hadamard.
$H_H(f)$	: fonction de transfert de la variance de Hadamard.
$f_1$	: fréquence d'analyse.
$f_n = n f_1$	: harmoniques impairs de $f_1$ ( $n$ entier impair).
$\Delta f$	: largeur de bande équivalente globale.
$\Delta f_0$	: largeur de bande équivalente d'un pic.
$h_p(t)$	: cycle de mesure pondéré par les coefficients du binôme.

$H_p(f)$	: fonction de transfert correspondante.
$h_{ps}(t)$	: cycle de mesure pondéré pseudo-sinusoïdalement.
$H_{ps}(f)$	: fonction de transfert correspondante.

### 1. INTRODUCTION

Des recherches approfondies sur la caractérisation et la mesure de l'instabilité de fréquence des oscillateurs ultra-stables ont été rendues nécessaires par les applications toujours plus nombreuses de ces oscillateurs (télécommunications, radars, spectroscopie, métrologie des fréquences etc).

L'instabilité de fréquence à court terme, qui a pour origine les sources de bruit aléatoire de l'oscillateur, peut être caractérisée dans le domaine fréquence et dans le domaine temps [1]. Deux catégories d'instruments sont alors nécessaires pour effectuer la mesure expérimentale des paramètres caractéristiques : les analyseurs de spectres basses-fréquences pour les mesures dans le domaine des fréquences et les fréquencemètres numériques pour les mesures dans le domaine des temps.

\* Stagiaire de thèse à la société ADRET ÉLECTRONIQUE. BP 33, 78190, Trappes, France.

\*\* Responsable de la recherche à la société ADRET ÉLECTRONIQUE. BP 33, 78190, Trappes, France.

La variance de Hadamard, développée par R. A. Baugh [2], est une technique de mesure qui permet l'estimation de la densité spectrale du bruit de fréquence (paramètre relatif au domaine fréquence) à l'aide d'un fréquencemètre.

Une analyse mathématique de cette technique de mesure permet l'étude des propriétés importantes de la fonction de transfert qui autorise le passage du domaine des temps vers le domaine des fréquences. De plus, cette analyse met en évidence les limitations intrinsèques de la méthode quant à la gamme de fréquence de Fourier analysable ; ces limitations résultent de l'existence de réponses parasites, inhérentes à la méthode, aux fréquences harmoniques de la fréquence analysée. De plus, les erreurs pouvant résulter de la nature même du spectre analysé sont mises en évidence par l'étude de la contribution de ces réponses parasites ; dans certains cas particuliers, une erreur sur la pente du spectre peut en résulter.

Enfin, deux types de pondération du cycle de mesure permettant de réduire l'importance des réponses parasites sont étudiées.

**2. DEFINITIONS ET TERMINOLOGIE [1]**

Le signal issu d'un oscillateur ultra-stable perturbé par des sources de bruit stationnaire peut être représenté par :

$$(1) \quad V(t) = V_0 \sin [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] ,$$

$V_0$  et  $\nu_0$  sont respectivement les valeurs nominales de l'amplitude et de la fréquence du signal. La fonction aléatoire  $\varphi(t)$  représente les fluctuations de phase (moyenne nulle, variation lente par rapport à  $\sin 2\pi\nu_0 t$ ).

La fréquence instantanée du signal est définie par :

$$(2) \quad \nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi\nu_0 t + \varphi(t)) = \nu_0 + \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi} .$$

La fonction aléatoire stationnaire :

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

représente les fluctuations de fréquence du signal autour de  $\nu_0$ . La fluctuation de fréquence relative instantanée est définie par :

$$(3) \quad y(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi\nu_0} , \quad (\omega_0 = 2\pi\nu_0) .$$

**2.1. Caractérisation dans le domaine des fréquences.**

L'instabilité de fréquence est caractérisée dans le domaine des fréquences par la densité spectrale

de puissance des fonctions aléatoires  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  ou  $y(t)$ , notées respectivement  $S_\varphi(f)$ ,  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  et  $S_y(f)$  :

$$(4) \quad S_{\dot{\varphi}}(f) = 4\pi^2 f^2 S_\varphi(f) ,$$

$$(5) \quad S_y(f) = \frac{1}{(2\pi\nu_0)^2} S_{\dot{\varphi}}(f) .$$

L'analyse spectrale du signal de sortie d'un discriminateur de fréquence ou d'un comparateur de phase fournit directement  $\frac{1}{4\pi^2} S_{\dot{\varphi}}(f)$  ou  $S_\varphi(f)$ . L'appareil de mesure est un analyseur de spectre basse fréquence dont le filtre constitue une fenêtre dans le domaine des fréquences.

**2.2. Caractérisation dans le domaine des temps.**

L'instabilité de fréquence est caractérisée dans le domaine des temps par la variance de la fluctuation relative  $y(t)$  moyennée pendant une durée  $\tau$ . Une estimation statistique particulière conduit à la variance d'Allan [3] :

$$(6) \quad \sigma_y^2(\tau) = \frac{\langle (\bar{\nu}_{k+1} - \bar{\nu}_k)^2 \rangle}{2\nu_0^2} .$$

avec

$$\bar{\nu}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} \frac{\dot{\varphi}(\theta)}{2\pi} d\theta , \quad \text{et} \quad t_{k+1} = t_k + \tau \text{ (mesures adjacentes).}$$

Le crochet  $\langle \rangle$  représente la moyenne statistique de l'expression  $(\bar{\nu}_{k+1} - \bar{\nu}_k)^2$ .

L'instrument de mesure fondamental pour la détermination de  $\sigma_y(\tau)$  est un fréquencemètre numérique effectuant des comptages de durée  $\tau$ , se comportant ainsi comme une fenêtre dans le domaine des temps.

**3. CYCLE DE MESURE ET FONCTION DE TRANSFERT DE LA VARIANCE D'ALLAN**

Pour expliquer l'origine des propriétés de la variance de Hadamard, il est intéressant d'étudier la structure de la relation qui existe entre  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  et la variance d'Allan :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{\langle (\bar{\nu}_{k+1} - \bar{\nu}_k)^2 \rangle}{2\nu_0^2} , \\ \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2\nu_0^2} \left\langle \left( \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} \frac{\dot{\varphi}(\theta)}{2\pi} d\theta - \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} \frac{\dot{\varphi}(\theta)}{2\pi} d\theta \right)^2 \right\rangle , \\ \sigma_y^2(\tau) &= \frac{1}{2\omega_0^2} \left\langle \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(\theta) h_A(t_k + \tau - \theta) d\theta \right)^2 \right\rangle , \end{aligned} \tag{7}$$

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\omega_0^2} \langle (\dot{\varphi}(t) \otimes h_A(t))^2 \rangle .$$

La variance d'Allan s'exprime en fonction du produit de convolution de  $\dot{\varphi}(t)$  par une fonction  $h_A(t)$  représentative du cycle de mesure, puisque l'on effectue la différence entre les résultats de deux mesures adjacentes de durée  $\tau$  (Fig. 1). Le produit

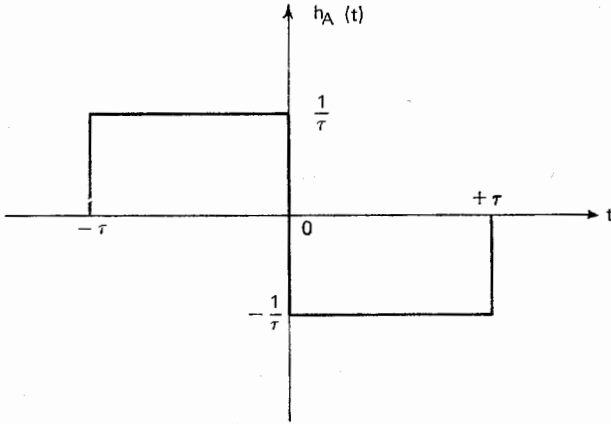


FIG. 1. — Cycle de mesure de la variance d'Allan.

de convolution  $z(t) = \dot{\varphi}(t) \otimes h_A(t)$  est la réponse au signal d'entrée  $\dot{\varphi}(t)$ , d'un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est  $h_A(t)$  et dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H_A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_A(t) e^{-i2\pi ft} dt = i2 \frac{\sin^2 \pi \tau f}{\pi \tau f}, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

D'où la densité spectrale de  $z(t)$  :

$$S_z(f) = |H_A(f)|^2 S_{\dot{\varphi}}(f) = 4 \frac{\sin^4 \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} S_{\dot{\varphi}}(f),$$

$$\langle z^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} S_z(f) df = 4 \int_0^{\infty} S_{\dot{\varphi}}(f) \frac{\sin^4 \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} df.$$

La variance d'Allan s'écrit alors (\*) :

(8)

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\infty} S_{\dot{\varphi}}(f) \frac{2 \sin^4 \pi \tau f}{(\pi \tau f)^2} df.$$

La fonction  $\frac{1}{2} |H_A(f)|^2$ , qui permet le passage de  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  à  $\sigma_y^2(\tau)$ , comporte un pic principal centré sur

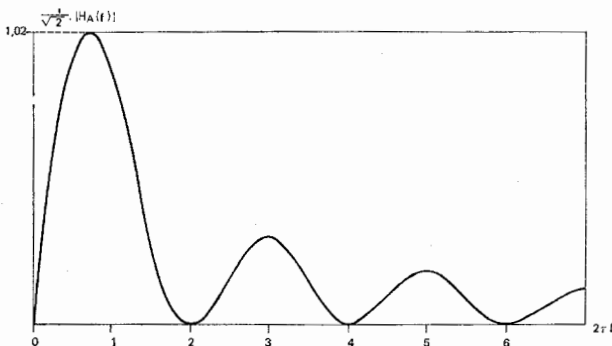


FIG. 2. — Module de la fonction de transfert de la variance d'Allan.

(\*) Une démonstration différente de cette relation importante apparaît dans la référence [4].

la fréquence  $f_c \approx \frac{0,742}{2\tau}$  (Fig. 2). Ce pic est toutefois trop large pour que la valeur de  $\sigma_y^2(\tau)$  puisse donner une estimation précise de  $S_{\dot{\varphi}}(f_c)$ . La variance d'Allan présente donc peu d'intérêt en vue de l'analyse spectrale du bruit de fréquence.

#### 4. DÉFINITION DE LA VARIANCE DE HADAMARD

Une relation de la forme

$$(9) \quad \sigma^2(\tau) = \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\infty} S_{\dot{\varphi}}(f) |H(f)|^2 df,$$

où  $\sigma^2(\tau)$  est mesuré à l'aide d'un fréquencesmètre, ne permet une estimation précise de  $S_{\dot{\varphi}}(f_c)$  que si  $|H(f)|^2$  possède un pic principal étroit centré sur la fréquence  $f_c$ .

La variance de Hadamard est caractérisée par un cycle de mesure tel que le carré du module de sa fonction de transfert possède un tel pic.

En effectuant des ensembles de  $2N$  mesures de fréquence, chacune de durée  $\tau$ , séparées par un temps mort  $T_M$ , la variance de Hadamard est définie par [2] :

(10)

$$\sigma_H^2(N, T_M, \tau) = \frac{1}{\nu_0^2} \langle (\bar{\nu}_{k+1} - \bar{\nu}_{k+2} + \bar{\nu}_{k+3} - \dots - \bar{\nu}_{k+2N})^2 \rangle,$$

$\bar{\nu}_{k+i}$  est le résultat de la  $i^e$  mesure du  $k^e$  ensemble de  $2N$  mesures. Le cycle de mesure, représenté sur la figure 3 par la fonction  $h_H(t)$ , possède une fonction de transfert  $H_H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_H(t) e^{-i2\pi ft} dt$ .

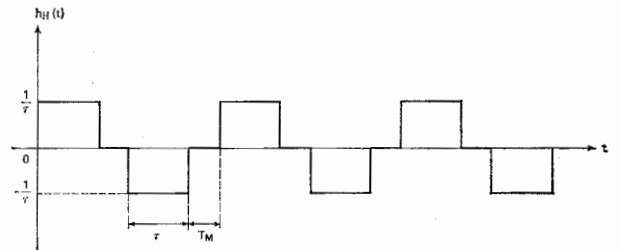


FIG. 3. — Cycle de mesure de la variance de Hadamard ( $N = 3$ ).

Par analogie avec les équations (7) et (8), la variance de Hadamard peut alors s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$(11) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) = \frac{1}{\omega_0^2} \langle (\dot{\varphi}(t) \otimes h_H(t))^2 \rangle,$$

$$(12) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) = \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{\infty} S_{\dot{\varphi}}(f) |H_H(f)|^2 df.$$

Cette dernière relation permettra, compte tenu de la nature de  $|H_H(f)|^2$ , d'effectuer l'analyse spectrale de  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  à l'aide d'un fréquencesmètre.

**5. FONCTION DE TRANSFERT DE LA VARIANCE DE HADAMARD**

Toutes les propriétés de la variance de Hadamard peuvent être déduites de l'étude de sa fonction de transfert.

**5.1. Calcul de la fonction de transfert.**

Le calcul de la transformée de Fourier de la fonction  $h_H(t)$  peut être effectué en écrivant  $h_H(t)$  sous la forme d'une somme de  $4N$  fonctions-échelon  $Y(t)$  convenablement décalées dans le temps :

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Plus précisément [5] :

$$(13) \quad h_H(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\tau} [Y(t - 2n(\tau + T_M)) - Y(t - 2n(\tau + T_M) - \tau) - Y(t - (2n + 1)(\tau + T_M)) + Y(t - (2n + 1)(\tau + T_M) - \tau)].$$

Le calcul effectué en annexe 1 donne l'expression analytique (\*) :

$$(14) \quad |H_H(f)| = \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \frac{\sin 2\pi N(\tau + T_M) f}{\cos \pi(\tau + T_M) f} \right|.$$

Ce module est le produit des trois fonctions représentées sur les figures 4, 5 et 6.

Pour les fréquences  $f_n = \frac{n}{2(\tau + T_M)}$ , ( $n$  entier impair),  $|H_H(f_n)|$  prend une forme indéterminée :

$$\frac{\sin 2\pi N(\tau + T_M) f_n}{\cos \pi(\tau + T_M) f_n} = \frac{\sin Nn\pi}{\cos n\pi/2} = 0.$$

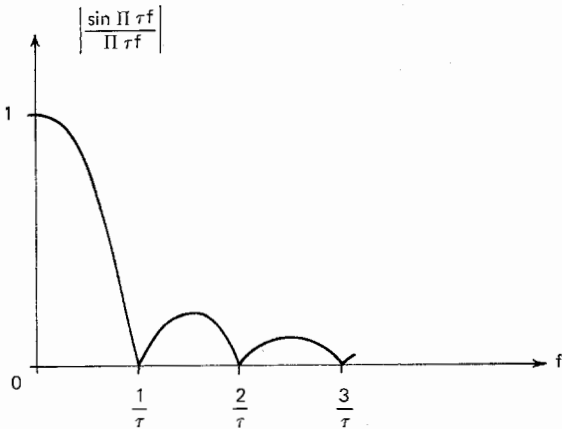


FIG. 4. — Fonction  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ ,

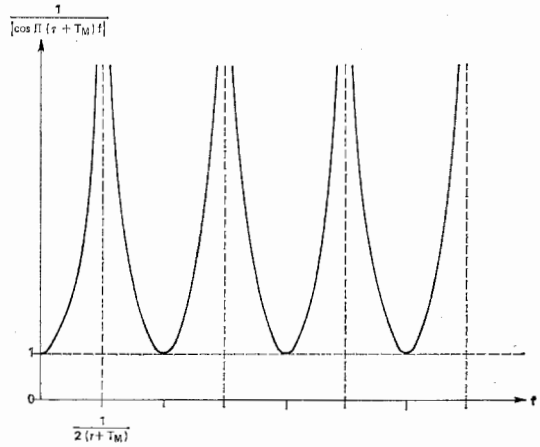


FIG. 5. — Fonction  $\frac{1}{|\cos x|}$ .

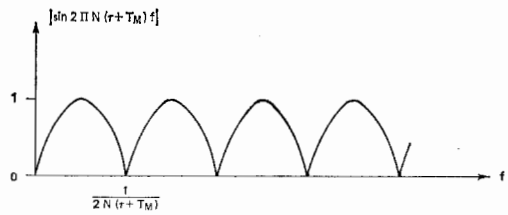


FIG. 6. — Fonction  $|\sin x|$ .

Le développement en série de Taylor au voisinage de  $f_n$  donne :

$$(15) \quad |H_H(f_n)| = 2N \left| \frac{\sin \pi \tau f_n}{\pi \tau f_n} \right|.$$

La figure 7 représente le module  $|H_H(f)|$  qui possède des pics centrés sur les fréquences :

$$(16) \quad f_n = \frac{n}{2(\tau + T_M)}, \quad (n \text{ impair}).$$

Le pic principal centré sur la fréquence  $f_1$  est accompagné de réponses parasites aux fréquences harmoniques  $f_n$ , dont l'amplitude décroît avec le rang  $n$ . Il est possible d'annuler les pics d'ordre  $n = 3m$  ( $m$  impair) en faisant

$$\tau = 2T_M \left( \sin \pi \tau f_n = \sin n \frac{\pi}{3} = \sin m \pi = 0. [2] \right).$$

**5.2. Largeur de bande équivalente.**

La variance de Hadamard se comporte ainsi dans le domaine des fréquences comme un filtre dont la largeur de bande équivalente est définie par :

$$\Delta f = \frac{\int_0^\infty |H_H(f)|^2 df}{|H_H(f_1)|^2}.$$

La largeur de bande équivalente est la largeur du filtre rectangle centré sur  $f_1$ , d'aire égale à

$$\int_0^\infty |H_H(f)|^2 df \text{ et de même valeur maximale } |H_H(f_1)|^2 \text{ (Fig. 8).}$$

(\*) Une expression sous forme de somme infinie est reportée dans la référence [2].

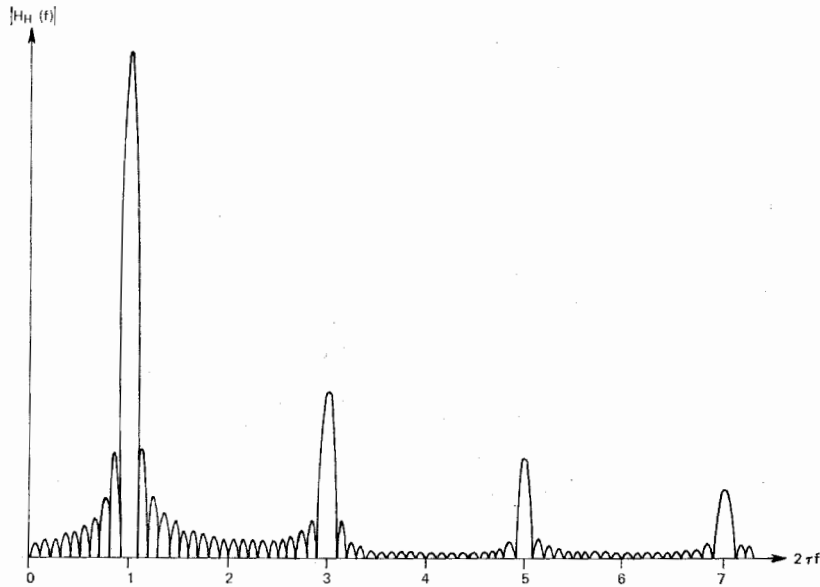


FIG. 7. — Module de la fonction de transfert de la variance de Hadamard ( $T_M = 0$ ).

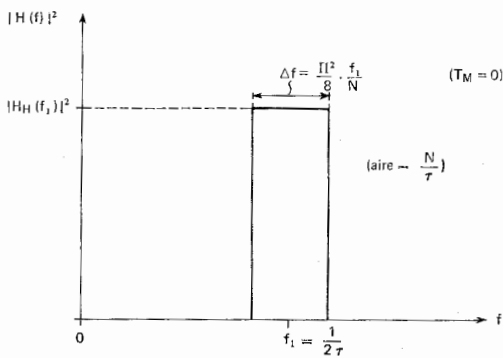


FIG. 8. — Filtre rectangle équivalent à  $|H_H(f)|^2$ .

Si  $T_M = \tau$ ,  $\tau f_1 = \frac{1}{4}$  :

$$\Delta f = \frac{\pi^2}{8} \frac{f_1}{N}$$

Pour une fréquence d'analyse  $f_1$  donnée, la largeur de bande équivalente est d'autant plus petite que le nombre de mesures  $2N$  est grand. En première approximation, il est donc possible de remplacer  $|H_H(f)|^2$  par le filtre rectangle représenté sur la figure 8.

En seconde approximation, on peut remplacer  $|H_H(f)|^2$  par un ensemble de filtres rectangles centrés sur les fréquences  $f_n$ , ayant respectivement pour hauteur  $|H_H(f_n)|^2$ , et de largeur de bande équivalente  $\Delta f_0$  (Fig. 9).

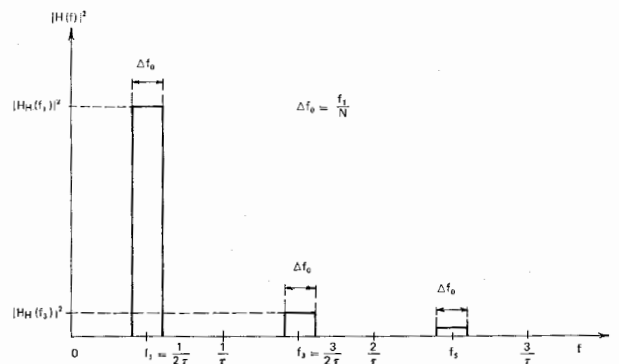


FIG. 9. — Ensemble de filtre équivalent à  $|H_H(f)|^2$  ( $T_M = 0$ ).

Le théorème de Parseval [6] permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_H(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H_H(f)|^2 df, \\ = 2 \int_0^{\infty} |H_H(f)|^2 df = \frac{2N}{\tau}$$

L'équation (15) donne :

$$|H_H(f_1)|^2 = 4 N^2 \left( \frac{\sin \pi \tau f_1}{\pi \tau f_1} \right)^2$$

d'où la largeur de bande équivalente :

$$(17) \quad \Delta f = \frac{1}{4N\tau} \frac{(\pi \tau f_1)^2}{\sin^2 \pi \tau f_1}$$

Si le temps mort est nul,  $\tau f_1 = 1/2$  :

$$(18) \quad \Delta f = \frac{\pi^2}{8} \frac{f_1}{N}$$

Si  $T_M = \frac{\tau}{2}$ ,  $\tau f_1 = \frac{1}{3}$  :

$$\Delta f = \frac{\pi^2}{9} \frac{f_1}{N}$$

Dans les trois cas importants  $T_M = 0$ ,  $T_M = \tau/2$  et  $T_M = \tau$ , le calcul montre qu'il faut avoir, pour chaque filtre :

$$(19) \quad \Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$$

pour retrouver l'aire totale de  $|H_H(f)|^2$  (Annexe 2).  $\Delta f_0$  est la largeur de bande équivalente de chaque pic de la fonction de transfert.

Ainsi, il y a lieu de distinguer deux définitions de la largeur de bande équivalente, selon que l'on représente la fonction de transfert de la variance de Hadamard par un filtre rectangle unique (équation 17, figure 8) ou par un ensemble de filtres rectangles (équation 19, figure 9).

Toutefois, dans les deux cas, la bande passante équivalente peut être diminuée en augmentant la valeur du paramètre  $N$ , ce qui constitue une caractéristique fondamentale de la méthode. Cette diminution de la bande d'analyse s'accompagne toutefois d'une plus longue durée de mesure.

### 5.3. Relations approchées entre la variance de Hadamard et le spectre de fréquence.

Le but de la variance de Hadamard est la détermination de la densité spectrale  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  à partir de la mesure de  $\sigma_H^2(N, T_M, \tau)$  effectuée avec un fréquences-mètre. La relation exacte (12) ne pouvant être inversée, une relation approchée entre  $\sigma_H^2(N, T_M, \tau)$  et  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  doit être établie.

En remplaçant la fonction de transfert par le filtre rectangle de la figure 8, et en supposant  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  sensiblement constant dans la bande passante  $\Delta f$ , la relation (12) prend la forme approchée.

$$(20) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{1}{\omega_0^2} S_{\dot{\varphi}}(f_1) |H_H(f_1)|^2 \Delta f.$$

Soit :

$$S_{\dot{\varphi}}(f_1) \approx \frac{\omega_0^2 \sigma_H^2(N, T_M, \tau)}{|H_H(f_1)|^2 \Delta f}.$$

Dans les cas  $T_M = 0$ ,  $T_M = \tau/2$  et  $T_M = \tau$ , cette relation s'écrit :

$$(21) \quad S_{\dot{\varphi}}(f_1) \approx \frac{\tau}{N} \omega_0^2 \sigma_H^2(N, T_M, \tau).$$

Toutefois, pour certains types de spectre, l'approximation précédente consistant à ne considérer que le pic principal centré sur  $f_1$ , peut introduire une erreur importante sur le spectre mesuré (§ 6.2.2.).

En remplaçant alors la fonction de transfert par l'ensemble des filtres rectangles de la figure 9, et en supposant  $S_{\dot{\varphi}}(f)$  sensiblement constant dans les bandes passantes  $\Delta f_0$ , la relation intégrale (12) s'écrit sous forme d'une somme :

$$(22) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} S_{\dot{\varphi}}(f_n) |H_H(f_n)|^2 \Delta f_0.$$

Dans les cas  $T_M = 0$  et,  $T_M = \tau$  :

$$(23) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{8N}{\pi^2 \tau \omega_0^2} \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} S_{\dot{\varphi}}(f_n).$$

Dans le cas  $T_M = \tau/2$  :

$$(24) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{9N}{\pi^2 \tau \omega_0^2} \sum_{\substack{n \\ \text{impair} \\ \text{sauf} \\ n=3m}} \frac{1}{n^2} S_{\dot{\varphi}}(f_n).$$

Seuls les termes dont la contribution est notable sont à prendre en considération dans les sommes précédentes. Si l'on se limite au terme principal ( $n = 1$ ), il est préférable d'utiliser la relation (20) qui fait intervenir la largeur de bande équivalente globale.

## 6. LIMITATIONS EN FRÉQUENCE DE LA VARIANCE DE HADAMARD

L'analyse spectrale par la variance de Hadamard n'est possible que sur une gamme de fréquence relativement étroite dont on établit ici les limites à partir de considérations sur la fonction de transfert.

### 6.1. Fréquence d'analyse maximale.

*A priori*, il semble possible d'augmenter sans limitation la fréquence d'analyse  $f_1 = [2(\tau + T_M)]^{-1}$  en diminuant  $\tau + T_M$ . En pratique, le temps mort du fréquences-mètre étant réglé à sa valeur minimale  $T_{M0}$ , on augmente  $f_1$  en diminuant  $\tau$  jusqu'à la limite inférieure permise par l'appareil. Si la condition  $\tau \ll T_{M0}$  peut être réalisée, la fréquence maximale semble être  $f_{1\text{max}} = [2 T_{M0}]^{-1}$ .

En fait, la contribution du pic d'ordre  $n$  intervient de plus en plus lorsque  $\tau$  décroît, puisque son amplitude relative

$$(25) \quad \left| \frac{H_H(f_n)}{H_H(f_1)} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin n\pi\tau f_1}{\sin \pi\tau f_1} \right|$$

tend vers l'unité lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , quel que soit  $n$ . Tous les pics ont alors la même hauteur et la relation approchée (21) ne peut conduire qu'à une estimation erronée de  $S_{\dot{\varphi}}(f_1)$  dans la majorité des cas.

Il faut imposer une valeur minimale de  $\tau$  (c'est-à-dire une valeur maximale de  $f_1$ ) pour que l'influence des pics harmoniques soit limitée. En imposant par exemple :

$$(26) \quad \left| \frac{H_H(f_n)}{H_H(f_1)} \right|_{\text{max}} = \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } n \text{ impair,}$$

l'expression (25) donne la relation :

$$(27) \quad \tau_{\text{min}} = T_{M0}.$$

La fréquence d'analyse maximale est alors :

$$(28) \quad f_{1\text{max}} = \frac{1}{4 T_{M0}}.$$

Pour les valeurs de  $f_1$  supérieures à cette valeur, l'amplitude relative de certains pics (\*) sera supérieure à  $1/n$ , entraînant une erreur notable dans la mesure de  $S_{\phi}(f_1)$ ; cette erreur dépend également de la nature du spectre analysé.

**6.2. Fréquence d'analyse minimale.**

La fréquence d'analyse  $f_1$  est d'autant plus petite que  $\tau + T_M$  est grand. Les limitations pratiques sont la valeur maximale  $\tau_{max}$  imposée par le fréquence-mètre, et la durée totale de mesure qui doit rester réaliste. Pour  $\tau = \tau_{max}$ , on diminue  $f_1$  en augmentant le temps mort entre les mesures.

Toutefois, une valeur maximale de  $T_M$  est nécessaire pour limiter l'influence des pics harmoniques, car l'amplitude relative (éq. (25)) tend vers l'unité lorsque  $T_M$  croît indéfiniment. En prenant  $T_M = \tau_{max}$  la fréquence d'analyse minimale est

$$(29) \quad f_{1min} = \frac{1}{4\tau_{max}},$$

et l'amplitude relative est donnée par l'équation (26). Pour les valeurs de  $f_1$  inférieures à cette valeur, la mesure de  $S_{\phi}(f_1)$  sera entachée d'une erreur due à la contribution des pics harmoniques; cette erreur dépendra également de la nature du spectre analysé (§ 6.3.).

**6.3. Influence du spectre analysé.**

Dans les sections précédentes, seules les propriétés de la fonction de transfert ont été considérées; la gamme de fréquence utile ( $f_{1min}$ ,  $f_{1max}$ ) a été déterminée en imposant une amplitude relative maximale pour les pics harmoniques de la fonction de transfert.

Néanmoins, même dans la gamme de fréquence utile, l'erreur commise sur la mesure de  $S_{\phi}(f_1)$  dépend également de la nature du spectre  $S_{\phi}(f)$  analysé: dans certains cas, le spectre mesuré peut ne pas suivre la même loi que le spectre réel; dans d'autres cas, l'erreur sera négligeable.

**6.3.1. Bruit blanc de fréquence.**

Le bruit thermique interne des oscillateurs crée un bruit blanc de fréquence:

$$S_{\phi}(f) = S_0, \text{ pour tout } f \geq 0.$$

L'équation (22) s'écrit alors:

$$(30) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} S_0 |H_H(f_n)|^2 \Delta f_0.$$

(\*) En particulier, l'amplitude relative du pic d'ordre 3 sera toujours supérieure à  $1/3$ .

Dans les cas  $T_M = 0$  et  $T_M = \tau$  (cf. éq. (23)):

$$(31) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{8NS_0}{\omega_0^2 \pi^2 \tau} \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \frac{1}{n^2} = \frac{NS_0}{\omega_0^2 \tau}.$$

Dans le cas  $T_M = \tau/2$  (cf. éq. (24)):

$$(32) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{9NS_0}{\omega_0^2 \pi^2 \tau} \sum_{\substack{n \\ \text{impair} \\ \text{sauf} \\ n=3m}} \frac{1}{n^2} = \frac{NS_0}{\omega_0^2 \tau}.$$

La relation approchée (21), consistant à ne garder que le pic principal, donne alors:

$$(33) \quad \frac{\tau}{N} \omega_0^2 \sigma_H^2(N, T_M, \tau) = S_0.$$

Ainsi, pour le bruit blanc de fréquence, cette approximation donne exactement la valeur  $S_0$  du spectre, ce qui résulte de la définition même de  $\Delta f$ , et de la définition du bruit blanc (densité spectrale constante).

**6.3.2. Bruit blanc de phase.**

Le bruit thermique externe des oscillateurs crée un bruit blanc de phase à bande limitée. Considérons le modèle de spectre représenté sur la figure 10; on a alors:

$$S_{\phi}(f) = \begin{cases} 4\pi^2 A f^2, & 0 \leq f \leq f_H, \\ 0, & f > f_H. \end{cases}$$

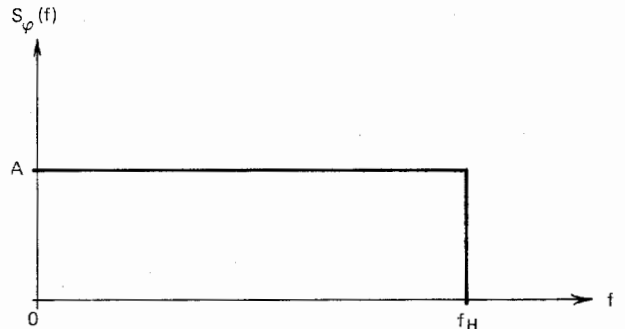


FIG. 10. — Spectre de phase blanc passe-bas.

Pour une fréquence d'analyse  $f_1$ ,  $P$  pics de la fonction de transfert se trouvent dans la bande  $(0, f_H)$ , où:

$$(34) \quad P \text{ est le plus grand entier } \leq \frac{f_H}{2f_1} + \frac{1}{2}.$$

La somme de l'équation (22) contient les  $P$  premiers termes:

$$(35) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} (4\pi^2 A n^2 f_1^2) |H_H(f_n)|^2 \Delta f_0.$$

Dans les cas  $T_M = 0$  et  $T_M = \tau$ , (cf. éq. (23)):

$$(36) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{8NP}{\omega_0^2 \pi^2 \tau} S_{\phi}(f_1).$$

Dans le cas  $T_M = \tau/2$  (cf. éq. (24)):

$$(37) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{9NP}{\omega_0^2 \pi^2 \tau} S_{\phi}(f_1).$$

La relation (21) donne alors respectivement :

$$(38) \quad \frac{\tau}{N} \omega_0^2 \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{8}{\pi^2} PS_{\dot{\phi}}(f_1),$$

$$(39) \quad \frac{\tau}{N} \omega_0^2 \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{9}{\pi^2} PS_{\dot{\phi}}(f_1),$$

c'est-à-dire environ  $P$  fois la valeur cherchée  $S_{\dot{\phi}}(f_1)$ , car la loi  $S_{\dot{\phi}}(f) \sim f^2$  compense exactement la décroissance de l'amplitude des pics harmoniques, et les  $P$  pics présents dans la bande  $(0, f_H)$  fournissent la même contribution à la variance de Hadamard. De plus, lorsque  $f_1$  devient très petit devant  $f_H$ , le nombre de pics  $P$  est inversement proportionnel à  $f_1$  (équation (34)); le spectre mesuré à partir des équations (38) et (39) varie alors comme  $f$  alors que  $S_{\dot{\phi}}(f) \sim f^2$ .

Ainsi, dans le cas du bruit blanc de phase, il y a lieu d'être prudent dans l'utilisation de la variance de Hadamard, car l'approximation (21) peut introduire un changement de pente entre le spectre mesuré et le spectre réel.

**6.3.3. Modèle  $S_{\phi}(f)$  lorentzien.**

Considérons le spectre de phase lorentzien

$$S_{\phi}(f) = \frac{2\alpha \bar{\varphi}^2}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + f^2}, \quad (f \geq 0)$$

$\alpha$  est la largeur à mi-hauteur ;  $\bar{\varphi}^2 = \int_0^{\infty} S_{\phi}(f) df$ .

La variance de Hadamard s'écrit alors (éq. (22)) :

$$(40) \quad \sigma_H^2(N, T_M, \tau) \approx \frac{1}{\omega_0^2} \frac{2\alpha \bar{\varphi}^2}{\pi} 4\pi^2 \times \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} \left( \frac{(nf_1)^2}{\alpha^2 + (nf_1)^2} |H_H(f_n)|^2 \Delta f_0 \right) = \sum_{\substack{n \\ \text{impair}}} C_n.$$

La contribution relative de l'harmonique  $n$  est alors :

$$(41) \quad \frac{C_n}{C_1} = \left( \frac{\sin n\pi\tau f_1}{\sin \pi\tau f_1} \right)^2 \frac{\alpha^2 + f_1^2}{\alpha^2 + (nf_1)^2},$$

Cette contribution varie notablement selon la valeur du rapport  $f_1/\alpha$ .

Cas  $T_M = 0$ .

$$(42) \quad \left( \frac{C_n}{C_1} \right)_{T_M=0} = \frac{\alpha^2 + f_1^2}{\alpha^2 + (nf_1)^2}.$$

La figure 11 montre la contribution relative de

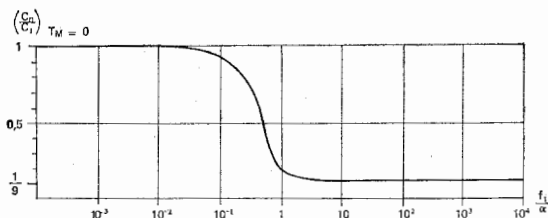


FIG. 11. — Contribution relative de l'harmonique  $n$  ( $n = 3$ ).

l'harmonique  $n$ . Pour  $f_1 \gg \alpha$ , elle est égale à  $1/n^2$  (le bruit de fréquence est sensiblement blanc pour  $f \gg \alpha$ ). Pour  $f_1 \ll \alpha$ , elle est sensiblement égale à l'unité (le bruit de phase est sensiblement blanc pour  $f \ll \alpha$ ).

Cas  $T_M = \tau/2$ .

On vérifie aisément que, pour  $m$  impair,  $C_{3m} \equiv 0$ . Pour  $n$  impair  $\neq 3m$  :

$$\left( \frac{C_n}{C_1} \right)_{T_M=\tau/2} = \left( \frac{C_n}{C_1} \right)_{T_M=0},$$

Cas  $T_M = \tau$  :

$$\left( \frac{C_n}{C_1} \right)_{T_M=\tau} = \left( \frac{C_n}{C_1} \right)_{T_M=0}.$$

Pour un spectre donné, la contribution du pic d'ordre  $n$  peut dépendre grandement de la valeur de  $f_1$  par rapport à une fréquence caractéristique du spectre.

**7. AMÉLIORATION DE LA MÉTHODE PAR PONDÉRATION DES MESURES**

Deux défauts de la fonction de transfert de la variance de Hadamard sont l'existence de pics aux fréquences  $nf_1$  (dont nous avons étudié les conséquences sur les propriétés de la méthode), et l'existence de lobes latéraux autour de la fréquence d'analyse  $f_1$ . Ces lobes peuvent être atténués ou même supprimés par une pondération adéquate des  $2N$  résultats de chaque ensemble de mesure.

**7.1. Pondération par les coefficients du binôme : élimination des lobes latéraux [2].**

Sur un ensemble de  $2N$  résultats de mesure, la pondération par les coefficients du binôme (\*) consiste à multiplier le  $(p + 1)^e$  résultat par  $C_{2N-1}^p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1$ ). Le cycle de mesure pondéré  $h_p(t)$ , figure 12, peut s'écrire :

$$(43) \quad h_p(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k h_k(t) \quad , \quad \text{si } N \text{ est impair,}$$

$$h_p(t) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{k+1} h_k(t) \quad , \quad \text{si } N \text{ est pair,}$$

où  $h_k(t)$ , représenté sur la figure 13, a pour transformée de Fourier :

$$(44) \quad H_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t) e^{-12\pi ft} dt,$$

(\*)  $C_n^p = C_n^{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .



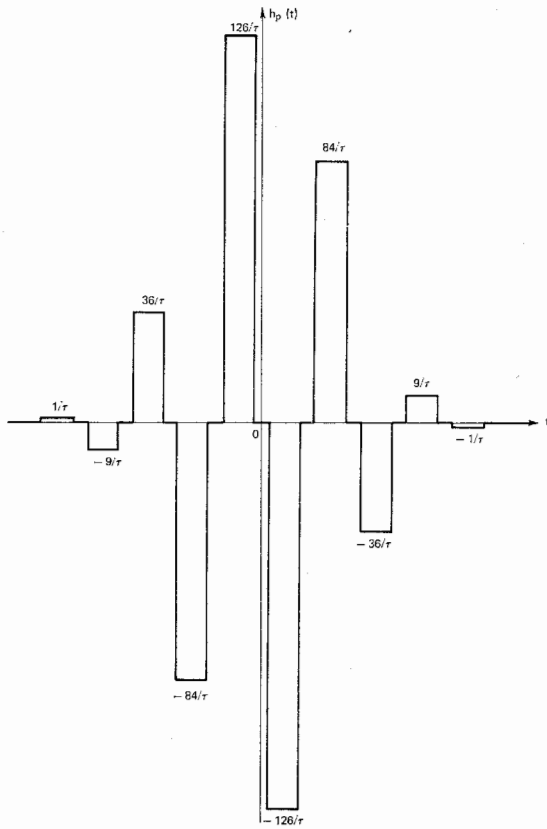


Fig. 12. — Pondération par les coefficients du binôme ( $N = 5$ ).

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\tau} C_{2N-1}^{N-(k+1)} \tau \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} e^{+i2\pi f(k+\frac{1}{2})(\tau+T_M)} \\
 &- \frac{1}{\tau} C_{2N-1}^{N-(k+1)} \tau \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} e^{-i2\pi f(k+\frac{1}{2})(\tau+T_M)}, \\
 &= 2i C_{2N-1}^{N-(k+1)} \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \sin 2\pi f \left(k + \frac{1}{2}\right) (\tau + T_M),
 \end{aligned}$$

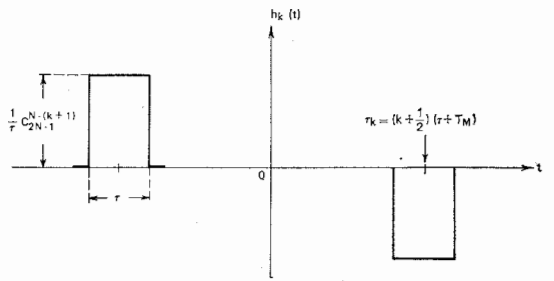


Fig. 13. — Élément simple de  $h_p(t)$ .

$$= 2i C_{2N-1}^{N+k} \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \sin 2\pi f \left(k + \frac{1}{2}\right) (\tau + T_M).$$

Le cycle de mesure pondéré a alors pour fonction de transfert

$$\begin{aligned}
 H_p(f) &= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k H_k(f), \quad (N \text{ impair}). \\
 (45) \quad H_p(f) &= 2i \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \times \\
 &\quad C_{2N-1}^{N+k} \sin 2\pi f \left(k + \frac{1}{2}\right) (\tau + T_M).
 \end{aligned}$$

La relation [7],

$$2^{2N-2} \sin^{2N-1} x = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k C_{2N-1}^{N+k} \sin(2k+1)x$$

permet d'écrire ;

$$(46) \quad |H_p(f)| = 2^{2N-1} \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \sin^{2N-1} \pi(\tau + T_M)f \right|.$$

Pour  $T_M = 0$  ( $\tau f_1 = 1/2$ ) :

$$(47) \quad |H_p(f)| = 2^{2N-1} \left| \frac{\sin^{2N} \pi \tau f}{\pi \tau f} \right|.$$

La fonction de transfert représentée sur la figure 14 est dépourvue de lobes latéraux. Toutefois l'ampli-

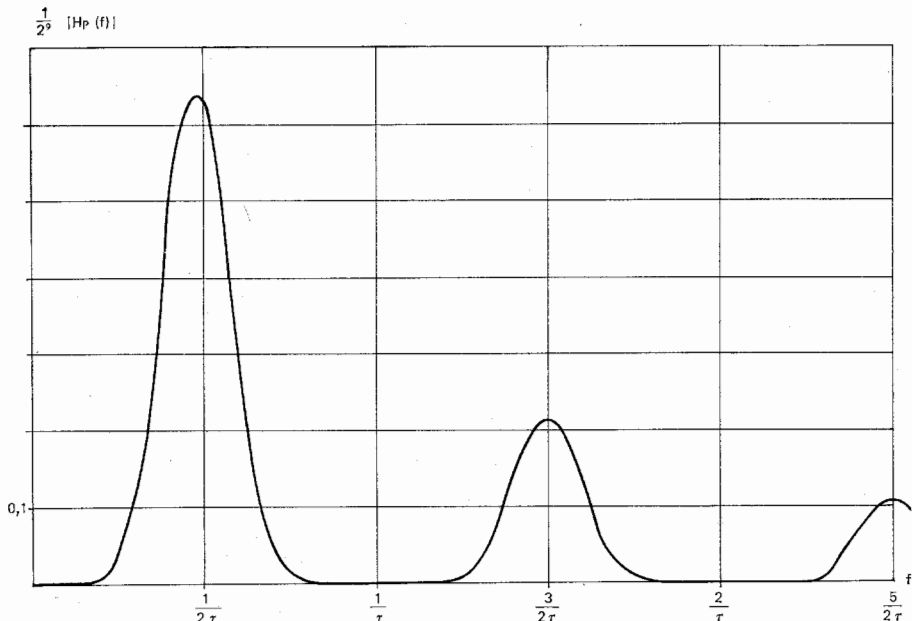


Fig. 14. — Fonction de transfert pondérée  $T_M = 0$ ,  $N = 5$ .

tude relative des pics harmoniques est inchangée (\*) (éq. (25) avec  $\tau f_1 = 1/2$ ). En outre, la pondération entraîne un élargissement de la bande passante équivalente. Il est néanmoins possible de trouver des pondérations telles que les lobes ne soient qu'atténués, mais avec un élargissement moindre de la bande passante [5].

## 7.2. Pondération pseudo-sinusoidale : élimination de certains pics harmoniques.

A l'opposé de la pondération précédente qui n'affecte pas l'amplitude relative des pics harmoniques, certaines pondérations permettent d'en supprimer plusieurs.

Les pics harmoniques résultent de ce que le cycle de mesure  $h_H(t)$  (Fig. 3) n'est qu'une approximation grossière de la sinusoïde  $\sin 2\pi f_1 t$  ( $f_1 = 1/2\tau$ ). Un cycle de mesure plus proche de cette sinusoïde aura une fonction de transfert dont le contenu en harmoniques sera plus faible.

Un tel cycle peut être obtenu en découpant chaque mesure de durée  $\tau$  en, par exemple, six mesures de durée  $\tau/6 = \tau_0$ , puis en pondérant chacun des six résultats obtenus par un coefficient convenable (Fig. 15). Chaque ensemble de durée  $\tau$  approxime

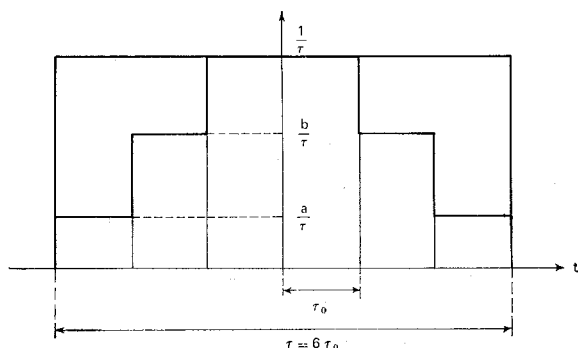


FIG. 15. — Découpage d'une mesure de durée  $\tau$  en six mesures de durée  $\tau_0$ .

ainsi une demi-période de la sinusoïde ; l'ensemble des  $2N$  mesures de durée  $\tau$  ainsi découpées, est alors une meilleure approximation de  $N$  périodes de  $\sin 2\pi f_1 t$ . Le cycle de mesure  $h_{ps}(t)$  ainsi obtenu a pour transformée de Fourier :

$$(48) \quad |H_{ps}(f)| = 2 \left| \frac{\sin \pi \tau_0 f}{\pi \tau_0 f} (a \cos 5\pi \tau_0 f + b \cos 3\pi \tau_0 f + \cos \pi \tau_0 f) \frac{\sin 2N\pi \tau f}{\cos \pi \tau f} \right|.$$

(\*) Les pics d'ordre  $n = 3m$  peuvent être supprimés en faisant  $T_M = \tau/2$ .

Les valeurs de  $a$  et  $b$  sont choisies pour avoir la meilleure approximation possible de la sinusoïde ; pour  $a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$  et  $b = \sqrt{3}-1$ , les pics d'ordre 3, 5, 7 et 9 sont supprimés. Le premier pic harmonique non nul est le pic d'ordre 11. Ainsi, une atténuation notable du rôle des harmoniques peut être obtenue au prix d'une plus grande complexité du cycle de mesure.

## 8. CONCLUSION

La variance de Hadamard permet la mesure de la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence d'un oscillateur. Les propriétés de cette technique de mesure résultent de la nature de sa fonction de transfert dont l'expression analytique exacte a été établie. La largeur de bande équivalente a été calculée en mettant en évidence la différence entre la largeur équivalente globale et la largeur équivalente d'un pic de la fonction de transfert.

L'avantage principal de cette technique est la possibilité d'effectuer une analyse spectrale aux fréquences inférieures à une centaine de Hertz avec une bande d'analyse étroite. Toutefois, les réponses parasites (harmoniques impaires) imposent des limites à la gamme de fréquence utile.

En outre, pour certains types de spectres, des différences importantes peuvent apparaître entre le spectre mesuré par la variance de Hadamard, et le spectre vrai ; ces différences ont pour origine la contribution des harmoniques impaires.

Enfin, nous avons montré qu'une pondération adéquate du cycle de mesure permet d'améliorer la fonction de transfert, soit en supprimant les lobes latéraux autour de la fréquence analysée, soit en supprimant certains pics harmoniques de la fréquence analysée.

En conclusion, cette technique de mesure utilisant un fréquencemètre permet l'analyse spectrale du bruit de fréquence des oscillateurs dans une gamme limitée de basses fréquences de Fourier. Toutefois, pour éviter des erreurs importantes sur le spectre mesuré, il faut rendre les contributions parasites des harmoniques impaires négligeables, en réalisant par exemple la relation  $T_M = \tau/2$ , ou bien encore en filtrant convenablement le signal analysé pour supprimer les hautes fréquences de Fourier du spectre du bruit de fréquence. Ce n'est qu'alors que les relations approchées peuvent être utilisées sans risques d'erreur dans la gamme de fréquence utile.

ANNEXE I

ANNEXE II

**Calcul de la fonction de transfert de la variance de Hadamard**

$$\begin{aligned}
 H_H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_H(t) e^{-i2\pi ft} dt, \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\pi ft}}{\tau} \sum_{n=0}^{N-1} [\Upsilon(t - 2n(\tau + T_M)) - \\
 &\Upsilon(t - 2n(\tau + T_M) - \tau) - \Upsilon(t - (2n+1)(\tau + T_M)) + \\
 &\Upsilon(t - (2n+1)(\tau + T_M) - \tau)] dt, \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)}}{i 2 \pi f \tau} - \frac{e^{-i2\pi f [2n(\tau+T_M)+\tau]}}{i 2 \pi f \tau} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{e^{-i2\pi f [(2n+1)(\tau+T_M)]}}{i 2 \pi f \tau} + \frac{e^{-i2\pi f [(2n+1)(\tau+T_M)+\tau]}}{i 2 \pi f \tau} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)} \left( \frac{1 - e^{-i2\pi f \tau}}{i 2 \pi f \tau} \right) - \right. \\
 &\quad \left. e^{-i2\pi f (2n+1)(\tau+T_M)} \left( \frac{1 - e^{-i2\pi f \tau}}{i 2 \pi f \tau} \right) \right], \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} e^{-i\pi \tau f} [e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)} - \right. \\
 &\quad \left. e^{-i2\pi f (2n+1)(\tau+T_M)}] \right], \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} e^{-i\pi \tau f} [e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)} \times \right. \\
 &\quad \left. (1 - e^{-i2\pi f (\tau+T_M)})] \right], \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} e^{-i\pi \tau f} e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)} \times \right. \\
 &\quad \left. 2 i \sin \pi f (\tau + T_M) e^{-i\pi f (\tau+T_M)} \right], \\
 &= \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) 2 i \sin \pi f (\tau + T_M) e^{-i\pi f (2\tau+T_M)} \times \\
 &\quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi f 2n(\tau+T_M)}, \\
 &= \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) 2 i \sin \pi f (\tau + T_M) e^{-i\pi f (2\tau+T_M)} \times \\
 &\quad \frac{1 - e^{-i2\pi f 2N(\tau+T_M)}}{1 - e^{-i2\pi f 2(\tau+T_M)}}, \\
 &= \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right) 2 i \sin \pi f (\tau + T_M) e^{-i\pi f (2\tau+T_M)} \times \\
 &\quad e^{-i2\pi f (N-1)(\tau+T_M)} \frac{\sin 2 \pi f N(\tau + T_M)}{\sin 2 \pi f (\tau + T_M)}, \\
 &= i \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \frac{\sin 2 \pi f N(\tau + T_M)}{\cos \pi f (\tau + T_M)} e^{-i2\pi f [N(\tau+T_M) - \frac{T_M}{2}]};
 \end{aligned}$$

Soit enfin :

$$|H_H(f)| = \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \frac{\sin 2 \pi f N(\tau + T_M)}{\cos \pi (\tau + T_M) f} \right|.$$

**Calcul de  $\Delta f_0$ .**

Cas  $T_M = 0$   $|H_H(f_n)|^2 = \frac{16 N^2}{n^2 \pi^2}$ , et  $f_1 \tau = \frac{1}{2}$ .

$$\sum_{\text{impair } n} \frac{16 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{16 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\text{impair } n} \frac{1}{n^2} = 2 N^2 \Delta f_0.$$

La condition,  $2 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$ , entraîne  $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$ .

Cas  $T_M = \frac{\tau}{2}$ .  $|H_H(f_n)|^2 = \frac{27 N^2}{n^2 \pi^2}$  ( $n \neq 3m$   $n$  et  $m$  impairs).

$$\sum_{\substack{\text{impair } n \\ \text{sauf } 3m}} \frac{27 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{27 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\substack{\text{impair } n \\ \text{sauf } 3m}} \frac{1}{n^2} = 3 N^2 \Delta f_0.$$

La condition,  $3 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$ , entraîne  $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$ .

Cas  $T_M = \tau$ .  $|H_H(f_n)|^2 = \frac{32 N^2}{n^2 \pi^2}$ , et  $\tau f_1 = \frac{1}{4}$ ,

$$\sum_{\text{impair } n} \frac{32 N^2}{n^2 \pi^2} \Delta f_0 = \frac{32 N^2}{\pi^2} \Delta f_0 \sum_{\text{impair } n} \frac{1}{n^2} = 4 N^2 \Delta f_0.$$

La condition,  $4 N^2 \Delta f_0 = \frac{N}{\tau}$ , entraîne  $\Delta f_0 = \frac{f_1}{N}$ .

**REMERCIEMENTS.**

Les auteurs remercient Monsieur le Professeur J. Uebersfeld, Directeur du Laboratoire de Physique et de Métrologie des Oscillateurs de Besançon, pour les conseils qu'il a bien voulu leur donner du cours de cette étude.

Manuscrit reçu le 15 février 1973.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] BARNES (J. A.) et coll. Characterization of frequency stability (Caractérisation de la stabilité de fréquence). *I.E.E.E. Trans., I.M.*, U. S. A. (mai 1971), **IM 20**, n° 2, pp. 105-120.
- [2] BAUGH (R. A.). Frequency modulation analysis with the Hadamard variance (Analyse de la modulation de fréquence par la variance de Hadamard). *Proc. 25th. frequency control symposium*; Atlantic-City (1971).
- [3] ALLAN (D. W.). Statistics of atomic frequency standards (Statistiques des étalons de fréquence atomiques). *Proc. I.E.E.E.*, U. S. A. (févr. 1966), **54**, n° 2, pp. 221-230.
- [4] RUTMAN (J.). Instabilité de fréquence des oscillateurs. *Onde Electr.*, Fr. (déc. 1972), **52**, n° 11, pp. 480-487. (Numéro spécial sur les oscillateurs ultra-stables.)
- [5] SAUVAGE (G.). Mesure de l'instabilité de fréquence des oscillateurs dans le domaine temps par filtrage du bruit de phase. *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, à paraître* (Paris VI).
- [6] PAPOULIS (A.). The Fourier integral and its applications (L'intégrale de Fourier et ses applications). *MacGraw-Hill*, New York (1962), 318 p.
- [7] DWIGHT (H. B.). Tables of integrals and other mathematical data (Tables des intégrales et autres données mathématiques). *Mac Millan*, U. S. A. (1972), 336 p.